

Punts d'equilibri globalment atractors

ANNA CIMA

Resum: Un punt d'equilibri d'un sistema dinàmic continu o discret és un atractor global si l'òrbita de qualsevol punt tendeix a aquest punt d'equilibri quan el temps tendeix a infinit. En aquest article tractem el problema de donar condicions suficients perquè un punt d'equilibri d'un sistema dinàmic sigui un atractor global. En particular, ens centrem en els problemes continu i discret de Markus-Yamabe i en les condicions de LaSalle. Obtenim algunes respostes afirmatives a l'existència d'atractor global i trobem diversos exemples que no la presenten. Al final explicitem un cas en què el problema no està tancat. Els resultats que es presenten s'han obtingut en col·laboració amb Armengol Gasull i Francesc Mañosas, i estan extrets dels articles comuns que se citen a la bibliografia.

Paraules clau: sistemes dinàmics continus i discrets, atractor global, conjectura de Markus-Yamabe, conjectura jacobiana, teorema de linealització.

Classificació MSC2010: 35A24, 37Cxx.

1 Introducció

Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació de classe C^1 i considerem el sistema d'equacions diferencials associat

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Suposem que \mathbf{p} és un punt d'equilibri de (1), és a dir, $F(\mathbf{p}) = 0$. Es diu que \mathbf{p} és un *atractor global* del sistema dinàmic induït per (1) si per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t, \mathbf{x})$ tendeix a \mathbf{p} quan t tendeix a infinit, on $\varphi(t, \mathbf{x})$ és la solució de (1) tal que $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

L'existència d'un atractor global implica que la dinàmica generada per F és de les més simples possibles. I donar condicions perquè F tingui un equilibri que sigui un atractor global té moltíssimes aplicacions: en el camp de l'economia (vegeu [15, 2, 19]), en la dinàmica de poblacions, en models epidemiològics (vegeu [30, 22, 34]), etc.

El 1960 L. Markus i H. Yamabe van posar la conjectura següent (vegeu [28]):

CMY(n). *Sigui F una aplicació de classe C^1 de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^n tal que, per a qualsevol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la matriu jacobiana de F a \mathbf{x} té tots els valors propis amb part real negativa. Si $F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, aleshores \mathbf{p} és un atractor global de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$.*

Recordem que el teorema de linealització afirma que, si $F(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ i la matriu jacobiana de F a \mathbf{p} , $JF(\mathbf{p})$, té els seus valors propis amb part real negativa, aleshores \mathbf{p} és un atractor local de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$.

Abans que l'article de Markus i Yamabe es publicués, Hartman ja havia demostrat que per a n arbitrari, un punt d'equilibri \mathbf{p} és un atractor global de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ si la matriu $JF(\mathbf{x}) + JF(\mathbf{x})^t$ té tots els valors propis negatius per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; vegeu [21].

A l'article esmentat, Markus i Yamabe van demostrar que la conjectura era certa per a $n = 2$ en el cas que una de les components de F només depengués d'una variable.

És fàcil veure que si **CMY(n)** és certa, aleshores F ha de ser injectiva. Altrament existirien \mathbf{a} i \mathbf{b} , amb $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ i $F(\mathbf{a}) = F(\mathbf{b})$. Si definim $G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - F(\mathbf{a})$, tenim que $JG(\mathbf{x})$ també compleix les hipòtesis de la conjectura però té dos punts d'equilibri diferents, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, i, per tant, G no té un atractor global.

L'any 1963, C. Olech va provar que, en el cas pla, el resultat és cert *si i només si* F és injectiva (vegeu [31]). I no va ser fins vint-i-cinc anys després que ell mateix, juntament amb G. Meisters, va provar que el resultat era cert per a aplicacions polinomials planes ([29]).

Per tant, sorgia la pregunta de si el resultat era cert per a aplicacions polinomials en qualsevol dimensió. De seguida es va relacionar aquesta conjectura amb l'emblemàtica conjectura jacobiana. Ho van fer Fournier i Martelli. Recordem la conjectura jacobiana.

CJ(n). *Sigui F una aplicació polinomial de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^n tal que el determinant de la matriu jacobiana de F en \mathbf{x} és una constant diferent de zero per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Aleshores F és bijectiva.*

Per veure la seva relació amb **CMY(n)** G. Fournier i M. Martelli van usar l'anomenat *teorema de reducció*, provat el 1982 per diversos autors; vegeu, per exemple, [13]. Segons aquest teorema, per provar la conjectura jacobiana n'hi ha prou de considerar aplicacions polinomials de la forma $F = -I + H$, on H és homogènia de grau 3 amb JH nilpotent. I van enunciar el resultat següent:

*Si **CMY(n)** és certa per a tot $n \geq 2$ i per a totes les aplicacions polinomials de la forma $-I + H$ amb H de grau 3 i JH nilpotent, aleshores la conjectura jacobiana és certa.*

Efectivament, si la conjectura jacobiana no és certa, hi ha un $n \in \mathbb{N}$ i un camp $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ no injectiu de la forma $F = -I + H$. Aleshores, definint $\tilde{F}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ per a

$$\tilde{F} = (\operatorname{Re} F_1, \operatorname{Im} F_1, \dots, \operatorname{Re} F_n, \operatorname{Im} F_n),$$

tenim que \tilde{F} té la mateixa estructura que F i, per tant, com que la part lineal de $\tilde{F}(\mathbf{x})$ és $-I$, obtenim que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, la matriu $J\tilde{F}(\mathbf{x})$ té tots els valors

propis iguals a -1 ; és a dir, estem en les hipòtesis de **CMY**(n) i, per tant, tindriem un contraexemple de la conjectura de Markus-Yamabe.

Els especialistes en la conjectura jacobiana diuen, per experiència, que si una conjectura implica la jacobiana, aleshores, molt probablement, la primera és falsa. Per tant, valia la pena centrar-se en la cerca de contraexemples de la conjectura de Markus-Yamabe per al cas polinomial per a $n \geq 3$.

Per al cas de camps de classe C^1 , l'any 1995 R. Fessler [14], C. Gutiérrez [20] i també A. A. Glutsyuk [18] van demostrar, independentment, que el resultat era cert per a aplicacions planes de classe C^1 . Ho van fer usant el resultat de Meisters i Olech, és a dir, provant la injectivitat de F .

En dimensió més gran o igual que 4, l'any 1996 J. Bernat i J. Llibre van donar exemples d'aplicacions de classe C^1 que satisfan les hipòtesis i tenen una òrbita periòdica, contradictòria amb l'existència d'un atractor global [1].

Finalment, el 1997 A. Gasull, F. Mañosas i jo mateixa, en col·laboració amb els algebristes holandesos A. van den Essen i E. Hubbers vam donar exemples d'aplicacions polinomials a \mathbb{R}^n per a $n \geq 3$ que satisfan les hipòtesis de **CMY**(n) i que tenen òrbites no acotades [4].

A la secció 2 d'aquest article explicaré la gènesi d'aquests contraexemples; a la secció 3 tractaré la versió discreta d'aquesta conjectura, mentre que a la secció 4 estudiaré altres problemes d'atracció global per a sistemes discrets i a la secció 5 continuaré aquest estudi per al cas que l'aplicació provingui d'una equació en diferències. Els resultats que presentaré s'han extret dels articles [5, 6, 7, 8] i [9].

2 Contraexemples polinomials a **CMY**(n) per a $n \geq 3$

DEFINICIÓ 1. Es diu que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una *funció quasi-homogènia* amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n i *quasi-grau* d si

$$f(\lambda^{w_1}x_1, \lambda^{w_2}x_2, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

per a tot $\lambda > 0$ i per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Els pesos w_i són números reals diferents de zero; en particular, poden ser negatius.

OBSERVACIÓ. Notem que si f és una funció quasi-homogènia amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n i quasi-grau d , aleshores, per a tota constant $c \neq 0$, f és també una funció quasi-homogènia amb pesos cw_1, cw_2, \dots, cw_n i quasi-grau cd .

Clarament, si f és una funció quasi-homogènia amb pesos $1, 1, \dots, 1$ i quasi-grau d , aleshores f és homogènia de grau d .

DEFINICIÓ 2. Es diu que $F = (F_1, F_2, \dots, F_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és un *camp quasi-homogeni* amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n i *quasi-grau* d si cada F_i és una funció quasi-homogènia amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n i quasi-grau $w_i + d - 1$. Es diu que F és un *camp quasi-homogeni lineal* si és un camp quasi-homogeni de quasi-grau 1.

A partir d'ara considerem camps quasi-homogenis lineals, és a dir, suposem que cada component F_i té quasi-grau w_i .

LEMA 3. *Si F un camp quasi-homogeni lineal amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n i considerem el sistema $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$. Aleshores F és invariant pel canvi $y_i = \lambda^{w_i} x_i$ per a $i = 1, \dots, n$.*

PROVA. Hem de mostrar que si les components de $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ són solució de $\dot{x}_i = F_i(\mathbf{x})$, per a $i = 1, \dots, n$, aleshores $\mathbf{y}(t) = (\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n)$ també és solució:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \lambda^{w_i} \dot{x}_i = \lambda^{w_i} F_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \\ &= F_i(\lambda^{w_1} x_1(t), \lambda^{w_2} x_2(t), \dots, \lambda^{w_n} x_n(t)) = F_i(\mathbf{y}(t)). \end{aligned} \quad \square$$

DEFINICIÓ 4. Donats els pesos w_1, w_2, \dots, w_n , definim la *semirecta* que passa pel punt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \{(\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

La proposició següent generalitza un resultat ja conegut per als sistemes homogenis.

PROPOSICIÓ 5. *Si $w_i w_j > 0$ per a tot $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, aleshores el comportament de les òrbites prop de l'origen determina el retrat de fase global. En particular, si l'origen és un atractor local, aleshores és un atractor global.*

PROVA. Podem suposar que $w_i > 0$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, de manera que l'origen estarà a la clausura de les semirectes. Suposem que coneixem les solucions de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ en un entorn B de l'origen i sigui $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, per a λ prou petita, el punt $\mathbf{z} = (\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n)$ estarà a B . Sigui $\mathbf{z}(t)$ la solució de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ que passa per \mathbf{z} , és a dir, tal que $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}$. Pel lema 3, sabem que

$$\mathbf{x}(t) := \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right)^{w_1} z_1(t), \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{w_2} z_2(t), \dots, \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{w_n} z_n(t) \right)$$

és també una solució. I és clar que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$.

D'altra banda, també és clar que si $\mathbf{z}(t)$ tendeix a l'origen quan t va a infinit, aleshores $\mathbf{x}(t)$ també tendeix a l'origen quan t va a infinit. \square

EXEMPLE. Considerem la família de sistemes següent:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y + ax^2z + bx^4 + cz^2, \\ \dot{z} = -z + dx^2. \end{cases}$$

Tots aquests sistemes són quasi-homogenis lineals amb pesos 1, 4, 2. Com que la part lineal al $(0, 0, 0)$ té el valor propi -1 amb multiplicitat 3, pel teorema de linealització el $(0, 0, 0)$ és un atractor local. Per la proposició anterior podem dir que el $(0, 0, 0)$ és un *atractor global*.

DEFINICIÓ 6. Sigui $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ i considerem un punt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Direm que la solució que passa per \mathbf{x} és de tipus exponencial si

$$\mathbf{x}(t) = (x_1 e^{m_1 t}, x_2 e^{m_2 t}, \dots, x_n e^{m_n t})$$

per a certs $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓ 7. Sigui F un camp quasi-homogeni lineal amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n i sigui $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ la semirecta que passa per \mathbf{x} . Aleshores, $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ és invariant pel flux de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ si i només si la solució que passa per \mathbf{x} és del tipus $x_i(t) = x_i e^{m_i t}$, on $m_i = c w_i$ per a algun $c \in \mathbb{R}$.

PROVA. Sigui $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \{(\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, \dots, \lambda^{w_n} x_n) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ i considerem la parametrització $\lambda = e^t$, és a dir,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} = \{(e^{w_1 t} x_1, e^{w_2 t} x_2, \dots, e^{w_n t} x_n) : t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Si $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ és invariant pel flux, aleshores existeix $\mu(t)$ tal que

$$w_i e^{w_i t} x_i = \mu(t) F_i(e^{w_1 t} x_1, e^{w_2 t} x_2, \dots, e^{w_n t} x_n).$$

Degut a la quasi-homogeneïtat de F , aquesta darrera condició pot ser escrita com $w_i x_i = \mu(t) F_i(\mathbf{x})$. Per tant, $\mu(t) = \mu$ és independent de t ; és a dir,

$$w_i x_i = \mu F_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Si $\mu = 0$, aleshores $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Com que l'origen és un punt crític de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$, la solució també pot ser considerada de tipus exponencial.

Si $\mu \neq 0$, considerem $x_i(t) := x_i e^{\frac{w_i}{\mu} t}$. Aleshores, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ és la solució que passa per \mathbf{x} ja que

$$\dot{x}_i(t) = \frac{w_i}{\mu} x_i e^{\frac{w_i}{\mu} t} = F_i(\mathbf{x}) e^{\frac{w_i}{\mu} t} = F_i(x_1 e^{\frac{w_1}{\mu} t}, x_2 e^{\frac{w_2}{\mu} t}, \dots, x_n e^{\frac{w_n}{\mu} t}).$$

Aquesta darrera igualtat és deguda al fet que F és quasi-homogeni lineal amb pesos w_1, w_2, \dots, w_n , i ens diu que la solució que passa per \mathbf{x} és de tipus exponencial.

Per provar el recíproc, considerem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que la seva solució sigui $x_i(t) = x_i e^{m_i t}$ amb $m_i = c w_i$.

Si $c = 0$, aleshores $x_i(t) = x_i$ per a tot $t \in \mathbb{R}$ i tot $i = 1, 2, \dots, n$, i tots els punts de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ són punts crítics de F .

Si $c \neq 0$, aleshores $\dot{x}_i(t) = F_i(\mathbf{x}(t))$ implica que

$$c w_i x_i e^{c w_i t} = F_i(x_1 e^{c w_1 t}, x_2 e^{c w_2 t}, \dots, x_n e^{c w_n t}) = e^{c w_i t} F_i(\mathbf{x}).$$

Per tant, $w_i x_i = (1/c) F_i(\mathbf{x})$. Aleshores, usant (3), veiem que $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ és invariant pel flux. \square

NOTA. Hi ha sistemes que tenen solucions de tipus exponencial i no són quasi-homogenis. Per exemple, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + xy - x^2y^2 + 2x^2y, \\ \dot{y} = y + x^2 - x^3y - 2xy^2 \end{cases}$$

té la solució $x(t) = x_0e^t$, $y(t) = (1/x_0)e^{-t}$ i no és quasi-homogeni.

De la proposició anterior es dedueix que (per a camps quasi-homogenis) les solucions exponencials passen per aquells punts $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfan el sistema d'equacions quasi-homogènies

$$cw_ix_i = F_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

És fàcil veure que, si F és quasi-homogeni, aleshores, o bé el conjunt de solucions d'aquest sistema es redueix a $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o bé, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ és solució, cada punt de $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ també és una solució. Posem-ne un exemple.

EXEMPLE.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y + x^2z, \\ \dot{z} = -z - x^2. \end{cases}$$

Aquest sistema és quasi-homogeni lineal amb pesos 1, 4, 2. Per trobar les solucions de tipus exponencial hem de resoldre el sistema (4), que, per a aquest sistema, s'escriu com

$$cx = -x, \quad 4cy = -y + x^2z, \quad 2cz = -z - x^2.$$

Les solucions són $\{(x, -\frac{x^4}{3}, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ i c ha de ser igual a -1 . Per a $x > 0$ (resp. $x < 0$) obtenim una òrbita del sistema que passa, per exemple, pel punt $(3, -27, 9)$ (resp. $(-3, -27, 9)$) i la solució que passa per $(3, -27, 9)$ (resp. per $(-3, -27, 9)$) és de tipus exponencial: $\mathbf{x}(t) = (3e^{-t}, -27e^{-4t}, 9e^{-2t})$ (resp. $\mathbf{x}(t) = (-3e^{-t}, -27e^{-4t}, 9e^{-2t})$).

Passem ja a construir els contraexemples. Comencem considerant camps del tipus $F = \lambda I + N$, on $\lambda \in \mathbb{R}$, I és la matriu identitat i N és nilpotent; és a dir, $JN(\mathbf{x})$ té tots els valors propis iguals a zero per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis iguals a λ en tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Per tant, considerem $\lambda < 0$ per tal d'estar a les hipòtesis de la conjectura.

Suposem $n = 2$. Aleshores N nilpotent implica que

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} \equiv 0.$$

Per tant, existeix $H(x, y)$ de manera que $N_1(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}$, $N_2(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}$ i el hessià de H és idènticament zero. D'un resultat clàssic de geometria diferencial

sabem que, per mitjà d'una transformació afí, podem escriure $H(u, v) = u + g(v)$ (vegeu [12] i [11]). Per tant, $H(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma + g(ax + by + c)$ ens proporciona una família d'exemples de Markus-Yamabe en dimensió 2:

$$F(x, y) = (\lambda x - bf(ax + by + c), \lambda y + af(ax + by + c)),$$

on $f = g'$, que la podem estendre a \mathbb{R}^n per a $n \geq 3$:

$$F(\mathbf{x}) = (\lambda x_1 - b(x_3)f(u), \lambda x_2 + a(x_3)f(u), \lambda x_3, \dots, \lambda x_n)$$

amb $u = a(x_3)x_1 + b(x_3)x_2 + c(x_3)$ i a, b, c funcions arbitràries de classe C^1 .

Prenent $a(x_3) = ax_3^l, b(x_3) = bx_3^m, c(x_3) = 0$ i $f(u) = u^k$ ($a, b \in \mathbb{R}, k, l, m \in \mathbb{N}$), obtenim el teorema següent.

TEOREMA 8. Considerem la família de camps de la forma

$$F(\mathbf{x}) = (\lambda x_1 - bx_3^m(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k, \lambda x_2 + ax_3^l(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k, \lambda x_3, \dots, \lambda x_n).$$

Aleshores:

(i) Per a tot $a, b, \lambda \in \mathbb{R}, k, l, m \in \mathbb{N}$, F és quasi-homogeni lineal amb pesos

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (m + kl, l + km, 1 - k, \dots, 1 - k).$$

(ii) Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lambda < 0$, F satisfà les hipòtesis de la conjectura de Markus-Yamabe.

(iii) Per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$ amb $\lambda < 0, k \neq 0$ un número parell, $l, m \in \mathbb{N}$ amb $l \neq m$ i per a tot $a, b \in \mathbb{R}$, l'equació diferencial $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ té òrbites no acotades.

PROVA. La demostració dels apartats (i) i (ii) consisteix en càlculs senzills, que ometem. Per veure (iii) considerem el sistema diferencial $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$. Aleshores les semirectes invariants queden determinades per les solucions del sistema format per les equacions $F_i(\mathbf{x}) = c\alpha_i x_i$, per a $i = 1, \dots, n$; és a dir, les solucions de

$$\begin{cases} \lambda x_1 - bx_3^m(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k = c(m + kl)x_1, \\ \lambda x_2 + ax_3^l(ax_1x_3^l + bx_2x_3^m)^k = c(l + km)x_2, \\ \lambda x_i = c(1 - k)x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n, \end{cases}$$

que són

$$\begin{cases} c = \frac{\lambda}{1 - k} > 0, \\ x_1 = \frac{-bB}{aA} x_2 x_3^{m-l}, \\ x_2^{k-1} x_3^{l+km} = \frac{-B}{a} \left(\frac{A}{b\lambda(l - m)} \right)^k, \end{cases}$$

on $A = \lambda \frac{(1-k)-(m+kl)}{1-k}$ i $B = \lambda \frac{(1-k)-(l+km)}{1-k}$. Com que k és parell, el sistema anterior sempre té solucions reals (prenent $x_3 = 1$, per exemple). Siguin \bar{x}_1, \bar{x}_2

i \bar{x}_3 unes solucions de les tres primeres equacions i prenem \bar{x}_i números reals arbitraris per a cada $i \geq 4$. Aleshores

$$\begin{cases} x_1(t) = \bar{x}_1 e^{\frac{\lambda(m+kl)}{1-k}t}, \\ x_2(t) = \bar{x}_2 e^{\frac{\lambda(l+km)}{1-k}t}, \\ x_i(t) = \bar{x}_i e^{\lambda t}, \quad i = 3, 4, \dots, n, \end{cases}$$

és solució de $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$. I, com que $\lambda < 0$, $k > 1$ i $m + kl > 0$, tenim que $x_1(t), x_2(t) \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$. \square

De tots aquests sistemes, el més simple és:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3)^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2, \\ \dot{x}_i = -x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

És quasi-homogeni lineal amb pesos $(1, 2, -1, \dots, -1)$ i té òrbites no acotades, com ara

$$x_1(t) = 18e^t, \quad x_2(t) = -12e^{2t}, \quad x_3(t) = e^{-t}, \dots, x_n(t) = e^{-t}.$$

Per tant, l'origen no és un atractor global i prova que **CMY(n)** és falsa per a $n \geq 3$!

3 El problema discret de Markus-Yamabe

Considerem ara la dinàmica generada per les iteracions d'una aplicació $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 : donada una condició inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, definim la successió $\mathbf{x}^{(k+1)} = F(\mathbf{x}^{(k)})$. L'òrbita d'un punt $\mathbf{x}^{(0)}$ és la successió $\mathbf{x}^{(k)}$ i els punts fixos de F són els punts en què l'òrbita és constant. És fàcil veure que si per a una condició inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, la successió $\mathbf{x}^{(k)}$ és convergent, aleshores el límit és un punt fix de F . Un punt fix és un atractor local si té un entorn V tal que totes les òrbites que comencen a V tendeixen al punt fix. I és un atractor global quan V és tot l'espai. En el cas discret, també tenim un teorema de linealització: si $F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ i la matriu jacobiana de F a \mathbf{p} , $JF(\mathbf{p})$, té els seus valors propis de mòdul més petit que 1, aleshores \mathbf{p} és un atractor local del sistema dinàmic discret generat per F . Per tant, és natural fer-se la pregunta següent:

PMYD(n). Si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és una aplicació de classe C^1 amb $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ tal que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la matriu jacobiana de F a \mathbf{x} té els seus valors propis de mòdul més petit que 1, és cert que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per F ?

Per a $n = 1$, la resposta és trivialment afirmativa.

Per a $n = 2$, ja hi ha contraexemples. El professor W. Szlenk, el 1994, va proposar l'aplicació

$$F(x, y) = \left(-\frac{ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} \right).$$

Observem que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) \xrightarrow{F} \left(0, \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) \xrightarrow{F} \left(-\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) \xrightarrow{F} \left(0, -\frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) \xrightarrow{F} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right),$$

i que quan $k \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$, aleshores $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis de mòdul menor que 1 per a tot $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. La presència d'aquesta òrbita periòdica de període 4 és contradictòria amb l'existència d'un atractor global.

Per a $n = 3$, les aplicacions quasi-homogènies també ens proporcionen una resposta negativa a **PMYD(n)**:

$$\begin{cases} F_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3)^2, \\ F_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2, \\ F_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_i, \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{cases}$$

L'aplicació F és quasi-homogènia lineal amb pesos $(1, 2, -1, \dots, -1)$ i té la solució no acotada:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{147}{32} 2^k, \frac{-63}{32} 2^{2k}, \left(\frac{1}{2}\right)^k, 0, \dots, 0\right).$$

Un càlcul simple mostra que $F(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{x}^{(k+1)}$, és a dir, que $\mathbf{x}^{(k)}$ és solució, i és la solució que passa per $(\frac{147}{32}, \frac{-63}{32}, 1, 0, \dots, 0)$; vegeu [6].

Restà, doncs, obert el cas polinomial quan $n = 2$. Ara veurem que en aquest cas la resposta és afirmativa.

TEOREMA 9. *Sigui $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació polinomial amb tots els valors propis de $JF(\mathbf{x})$ amb mòdul més petit que 1 per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Aleshores, existeix un únic punt fix que és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per F .*

Abans de demostrar el teorema necessitem dos resultats.

LEMA 10. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació polinomial tal que $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis amb mòdul més petit que 1 per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, el polinomi característic de $JF(\mathbf{x})$ és independent de \mathbf{x} .*

PROVA. Sigui $P_{\mathbf{x}}(\lambda)$ el polinomi característic de $JF(\mathbf{x})$ i siguin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les seves arrels. Aleshores,

$$P_{\mathbf{x}}(\lambda) = \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n t_n,$$

on

$$t_j = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_j=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_j}} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_j}.$$

Com que $|\lambda_i| < 1$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, per la desigualtat triangular tenim que $|t_j| < k_j$, on

$$k_j := \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_j=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_j}}^n 1,$$

per a tot $j = 1, 2, \dots, n$. D'altra banda, com que les components de F són polinomis i podem descriure cada t_j com la suma de tots els menors d'ordre j que tenen la seva diagonal sobre la diagonal principal de $JF(\mathbf{x})$, podem concloure que t_j és un polinomi en \mathbf{x} per a cada $j = 1, 2, \dots, n$. Com que els únics polinomis fitats són les constants, tenim que el polinomi característic no depèn de \mathbf{x} . \square

L'altre resultat que necessitem és per a aplicacions triangulars.

DEFINICIÓ 11. Una aplicació $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és *triangular* si

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Resulta que la pregunta **PMYD(n)** té una resposta afirmativa per a tota F triangular de classe C^1 i en qualsevol dimensió.

TEOREMA 12. Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació triangular de classe C^1 tal que $JF(\mathbf{x})$ té tots els valors propis amb mòdul més petit que 1 per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Suposem que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Aleshores, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per F .

PROVA. Provarem, per inducció sobre m , l'afirmació següent: Considerem $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicació triangular de classe C^1 tal que:

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right| < 1, \quad \left| \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right| < 1, \dots, \quad \left| \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \right| < 1 \quad \text{i} \quad F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Fixem $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ i sigui $\mathbf{x}^{(k+1)} = F(\mathbf{x}^{(k)})$. Aleshores existeixen k_0 suficientment gran, $M \in \mathbb{R}^+$ i $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$, tals que

$$|x_i^{(k+k_0)}| \leq MK^k \quad \text{per a tot } i = 1, 2, \dots, m.$$

Si provem aquest resultat, clarament, la successió d'iterats convergirà a $\mathbf{0}$ per a tota condició inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

La demostració per al cas $m = 1$ és molt senzilla. Pel teorema del valor mitjà, per a cada $x \in \mathbb{R}$, tenim que $F(x) - F(0) = F'(\xi)x$, on ξ està entre 0 i x . Això ja implica que $|x^{(0)}| > |x^{(1)}| > |x^{(2)}| > \dots$. Si diem que $K = \max\{|F'(x)| : -|x^{(0)}| \leq x \leq |x^{(0)}|\}$ i $M = |x^{(0)}|$, tenim que $0 < K < 1$, per hipòtesi, i

$$|x^{(1)}| \leq K|x^{(0)}| = MK, \quad |x^{(2)}| \leq K|x^{(1)}| \leq MK^2, \dots, |x^{(k)}| \leq MK^k.$$

Suposem ara que l'afirmació és certa per a tot $m < s$ i provem-ho per a $m = s$.

Fixem $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^{s-1}$. Aplicant la hipòtesi d'inducció, tenim que existeixen k_0 , M i K tals que

$$|\mathbf{x}_i^{(k+k_0)}| \leq MK^k \text{ per a cada } i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ i per a tot } k \in \mathbb{N}.$$

No és restrictiu canviar $\mathbf{x}^{(0)}$ per $\mathbf{x}^{(k_0)}$ i suposar que

$$|\mathbf{x}_i^{(k)}| \leq MK^k \text{ per a cada } i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ i per a tot } k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Considerem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(k)} &= F_s(\mathbf{x}^{(k-1)}) = F_s(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_s^{(k-1)}) = \\ &= \int_0^{x_s^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_s}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{s-1}^{(k-1)}, t) dt + \\ &\quad + \int_0^{x_{s-1}^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_{s-2}^{(k-1)}, t, 0) dt + \dots \\ &\quad + \int_0^{x_1^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_1}(t, 0, \dots, 0) dt. \end{aligned}$$

Per la hipòtesi d'inducció, sabem que, per a tot $k \in \mathbb{N}$, per a tot $i < s$ i per a tot $t \in [0, x_i^{(k)}]$, els vectors $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, t, 0, \dots, 0)$ pertanyen a un compacte L . Per a cada $i < s$, sigui M_i el màxim valor que pren $\frac{\partial F_s}{\partial x_i}$ a L i anomenem $\bar{M} = \max\{M_1, M_2, \dots, M_{s-1}\}$.

Usant que si $a < b$, aleshores $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$, podem escriure

$$|\mathbf{x}_s^{(k)}| \leq |\mathbf{x}_s^{(k-1)}| + \bar{M}(|\mathbf{x}_{s-1}^{(k-1)}| + |\mathbf{x}_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |\mathbf{x}_1^{(k-1)}|). \quad (6)$$

A partir de les equacions (5) i (6) obtenim:

$$|\mathbf{x}_s^{(k)}| \leq |\mathbf{x}_s^{(k-1)}| + (s-1)M\bar{M}K^{k-1}. \quad (7)$$

Anomenant $C = (s-1)M\bar{M}$, i treballant aquesta desigualtat inductivament, tenim que

$$|\mathbf{x}_s^{(k)}| \leq |\mathbf{x}_s^{(0)}| + C(K^{s-1} + K^{s-2} + \dots + 1) \leq |\mathbf{x}_s^{(0)}| + \frac{C}{1-K}.$$

Per tant, $\mathbf{x}_s^{(k)}$ és una successió fitada. Com que el mateix és cert per a $\mathbf{x}_i^{(k)}$, per a $i = 1, 2, \dots, s-1$, existeix $R > 0$ tal que $|\mathbf{x}_i^{(k)}| \leq R$ per a $i = 1, 2, \dots, s$. I podem definir

$$D = \max \left\{ \left| \frac{\partial F_s}{\partial x_s}(y_1, y_2, \dots, y_s) \right| : |y_i| \leq R, i = 1, 2, \dots, s \right\}$$

i assegurar que D és estrictament més petit que 1. Això implica que la desigualtat (6) pot ser substituïda per

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + \bar{M}(|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|)$$

i la desigualtat (7), per

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + CK^{k-1}. \quad (8)$$

Seguint aquesta desigualtat recurrentment, tenim que

$$\begin{aligned} |x_s^{(k)}| &\leq D(D|x_s^{(k-2)}| + K^{k-2}C) + K^{k-1}C \leq \\ &\vdots \\ &\leq D^k|x_s^{(0)}| + C(K^{k-1} + DK^{k-2} + \dots + D^{k-1}) \leq \\ &\leq D^k|x_s^{(0)}| + kC(\max(K, D))^{k-1} \leq \\ &\leq \max(K, D)^k \left[|x_s^{(0)}| + \frac{kC}{\max(K, D)} \right] \leq \\ &\leq \hat{M}(k)\hat{K}^k, \end{aligned}$$

on hem anomenat $\hat{K} = \max(K, D)$, que clarament compleix $0 < \hat{K} < 1$ i $\hat{M}(k) = |x_s^{(0)}| + \frac{kC}{\max(K, D)}$. Observem que $\hat{M}(k)$ és lineal en k .

Ara considerem $0 < \bar{K} < \hat{K}$, de manera que $\frac{\hat{K}}{\bar{K}} < 1$. Com que l'exponencial domina els polinomis, tenim que $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\hat{K}}{\bar{K}}\right)^k \hat{M}(k) = 0$ i, per tant, $\left(\frac{\hat{K}}{\bar{K}}\right)^k \hat{M}(k) \leq \bar{M}$. Ajuntant tot el que hem provat:

$$|x_s^{(k)}| \leq \hat{M}(k)\hat{K}^k = \left(\frac{\hat{K}}{\bar{K}}\right)^k \hat{M}(k)\bar{K}^k \leq \bar{M}\bar{K}^k,$$

i hem acabat la inducció.

Així, per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, tenim que $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_i^{(k)}| = 0$ i l'origen és un atractor global per al sistema dinàmic discret generat per l'aplicació triangular. \square

Passem ja a demostrar el teorema 9. Usarem uns resultats clàssics de F. Dillen [11] (1991) i de K. Jörgens [23] (1954) sobre l'estructura dels polinomis amb hessià constant.

PROVA DEL TEOREMA 9. Sigui $F = (P, Q)$. Aleshores, pel lema 10,

$$t_1 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

són constants.

Considerem $\bar{F} = F - (t_1/2)I := (\bar{P}, \bar{Q})$. Aleshores

$$\bar{t}_1 = 0 \quad \text{i} \quad \bar{t}_2 = t_2 - \frac{t_1^2}{4}.$$

Per tant, existeix un polinomi $H(x, y)$ tal que $\bar{P} = -\partial H/\partial y$ i $\bar{Q} = \partial H/\partial x$, i el hessià de H és la constant \bar{t}_2 . Si $\bar{t}_2 \neq 0$, aplicant els resultats de l'article [11] sabem que via un canvi complex afí, $x = \alpha u + \beta v + \gamma$, $y = au + bv + c$, H es pot escriure

$$H(\phi(u, v)) = \sqrt{-\bar{t}_2}uv + h(u), \text{ on } h \text{ és un polinomi en la variable } u.$$

Suposem que $\bar{t}_2 < 0$. Mirant la prova a [11] veiem que el canvi afí es pot prendre a coeficients reals i, per tant, $H(\phi(u, v)) \in \mathbb{R}$. Sigui doncs,

$$\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ c \end{pmatrix}, \text{ amb } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{pmatrix}$$

i $\det(A) = b\alpha - a\beta$, on tots els coeficients són reals. El canvi invers és

$$\phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} \gamma \\ c \end{pmatrix}.$$

La informació que tenim és que $H(\phi(u, v)) = \sqrt{-\bar{t}_2}uv + h(u)$ i que $\bar{P} = -\partial H/\partial y$ i $\bar{Q} = \partial H/\partial x$. Aplicant la regla de la cadena a $H(\phi(u, v))$, tenim:

$$\frac{\partial}{\partial u} H(\phi(u, v)) = \alpha(\bar{Q} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - a(\bar{P} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{-\bar{t}_2}v + h'(u),$$

$$\frac{\partial}{\partial v} H(\phi(u, v)) = \beta(\bar{Q} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - b(\bar{P} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sqrt{-\bar{t}_2}u,$$

és a dir,

$$\begin{pmatrix} -a & \alpha \\ -b & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{P} \circ \phi \\ \bar{Q} \circ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2}v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2}u \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\begin{pmatrix} \bar{P} \circ \phi \\ \bar{Q} \circ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2}v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2}u \end{pmatrix}.$$

Ara usarem aquesta igualtat per a calcular la conjugada de \bar{F} via ϕ .

$$\begin{aligned}
 (\phi^{-1} \circ \bar{F} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \phi^{-1} \circ \begin{pmatrix} \bar{P} \circ \phi \\ \bar{Q} \circ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det(A)} A^{-1} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2} v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2} u \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{-\bar{t}_2} v + h'(u) \\ \sqrt{-\bar{t}_2} u \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -\sqrt{-\bar{t}_2} u \\ \sqrt{-\bar{t}_2} v + h'(u) \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 u + c_2 \\ c_3 v + p(u) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

on c_1 , c_2 i c_3 són reals i p és un polinomi en u . Veiem, doncs, que \bar{F} és conjugada via ϕ d'aquesta aplicació triangular tan senzilla. Ara veurem com serà la conjugada de F via ϕ :

$$\begin{aligned}
 (\phi^{-1} \circ F \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \phi^{-1} \left(\bar{F} + \frac{t_1}{2} I \right) \left(\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \phi^{-1} \left(\bar{F} \circ \phi + \frac{t_1}{2} \phi \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \\
 &= A^{-1} \left(\bar{F} \circ \phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) + \frac{t_1}{2} A^{-1} \phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= (\phi^{-1} \circ \bar{F} \circ \phi) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{t_1}{2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{t_1}{2} A^{-1} \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 u + c_2 \\ c_3 v + p(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t_1}{2} u \\ \frac{t_1}{2} v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 u + k_2 \\ k_3 v + q(u) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

on k_1 , k_2 i k_3 són reals i q és un polinomi en u . Per tant, F també és conjugada d'aquesta senzilla aplicació triangular $\tilde{F}(u, v) := (k_1 u + k_2, k_3 v + q(u))$. Com que són conjugades, tenen els mateixos valors propis, així que el jacobià de \tilde{F} té tots els valors propis amb mòdul més petit que 1. Veiem, també, que \tilde{F} té un únic punt fix. Fent una translació que porti aquest punt fix al $(0, 0)$ i aplicant el teorema 12, tenim que l'origen és un atractor global per a F .

Suposem ara que $\bar{t}_2 = 0$. De la demostració de Dillen se segueix que, via un canvi afí de coordenades, H es pot escriure com $k v + h(u)$, on h és un polinomi en u . Resseguint els mateixos passos que en el cas $\bar{t}_2 < 0$, veiem que \bar{F} és conjugada d'una aplicació del tipus $(k_1 u + k_2, k_3 v + p(u))$, on p és un polinomi en u . I el mateix per a F . I la mateixa conclusió.

Si $\bar{t}_2 > 0$, l'article de Jörgens ens diu que, per força, $H(x, y)$ és un polinomi quadràtic. Per tant, \bar{F} i F són aplicacions polinòmiques de grau 1, per a les quals és conegut que el fet de tenir valors propis més petits que 1 implica que totes les òrbites tendeixen a l'origen. \square

Es podria pensar que la hipòtesi $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ no és essencial quan considerem el problema discret de Markus-Yamabe. De seguida, però, ens adonem que l'hem de tenir en compte. Per exemple, si considerem el sistema dinàmic generat per

$$F(x) = \log(1 + e^x),$$

és clar que $|DF(x)| = |F'(x)| < 1$ però no té cap punt fix.

Efectivament, a [6] provem una interessant relació entre l'existència de punt fix per a aplicacions polinomials que satisfan les hipòtesis de Markus-Yamabe i l'emblemàtica conjectura jacobiana. Expliquem ara aquest resultat.

Considerem el problema següent:

LA CONJECTURA DEL PUNT FIX. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació polinomial tal que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la matriu jacobiana de F a \mathbf{x} té tots els valors propis de mòdul més petit que 1. Aleshores, F té un únic punt fix.*

Considerant les parts real i imaginària de les components d'una aplicació polinomial $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ i usant arguments estàndard d'àlgebra lineal, és fàcil provar que aquesta conjectura pot ser formulada en la forma equivalent següent:

LA CONJECTURA DEL PUNT FIX. *Sigui $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicació polinomial tal que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, la matriu jacobiana de F a \mathbf{x} té tots els valor propis de mòdul més petit que 1. Aleshores, F té un únic punt fix.*

TEOREMA 13 ([6]). *La conjectura jacobiana és equivalent a la conjectura del punt fix.*

PROVA. Suposem que la conjectura jacobiana és certa i prenem F que satisfaci les hipòtesis de la conjectura del punt fix. Sigui $G(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Aleshores, els valors propis de $DG(\mathbf{x})$ són els valors propis de $DF(\mathbf{x})$ menys 1. A partir dels resultats obtinguts anteriorment, sabem que $\det DG(\mathbf{x})$ és constant. A més, per hipòtesi, sabem que aquesta constant no és zero. Per tant, G és invertible i existeix un únic zero de G , que és l'únic punt fix de F .

Ara suposem que la conjectura jacobiana no és certa. Pel teorema de reducció, podem afirmar que existeix $n \in \mathbb{N}$ i $G: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ polinomial i no invertible de la forma

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + H(\mathbf{x}),$$

on $DH(\mathbf{x})$ és una matriu nilpotent per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Ara, sigui $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}G(\mathbf{x})$ i $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ amb $g(\mathbf{y}) = g(\mathbf{z}) = \mathbf{p}$. Definint $h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} - g(\mathbf{x})$, tenim que $h(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ i $h(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$. D'altra banda, com que $DH(\mathbf{x})$ és una matriu nilpotent per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, tots els seus valors propis són zero. De la definició de $h(\mathbf{x})$ obtenim

$$Dh(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - Dg(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}DH(\mathbf{x}) \right) = \frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}DH(\mathbf{x}),$$

que implica que tots els valors propis de $Dh(\mathbf{x})$ són $1/2$. Per tant, $h(\mathbf{x})$ està sota les hipòtesis de la conjectura del punt fix i té dos punts fixos diferents. \square

4 Els problemes de LaSalle

En aquesta secció exposaré els resultats obtinguts a [7].

Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació de classe C^1 i, com a la secció anterior, considerem el sistema dinàmic discret generat per F .

Donada una matriu $A = (a_{ij})$ real $n \times n$, definirem $|A| = (|a_{ij}|)$. Si $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, aleshores podem escriure $F(\mathbf{x})$ com $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, on $A(\mathbf{x})$ és una matriu de funcions $n \times n$. LaSalle, al seu llibre *The Stability of Dynamical Systems* (1976) (vegeu [25]), va donar possibles condicions suficients per a tenir un atractor global, generalitzacions del cas $n = 1$. Concretament:

(A_1) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $A(\mathbf{x})$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(A_2) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $|A(\mathbf{x})|$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(B_1) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $JF(\mathbf{x})$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(B_2) $|\lambda| < 1$ per a cada λ valor propi de $|JF(\mathbf{x})|$ i per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Tal com es pot observar, la condició (B_1) és la que hem considerat quan hem tractat l'anomenat *problema discret de Markus-Yamabe*. Va ser Meisters qui ens va fer saber d'aquest llibre després d'escriure l'article [6]. En aquesta secció, encarem l'estudi dels problemes (A_1), (A_2) i (B_2).

Veurem que hi ha aplicacions polinomials que satisfan les hipòtesis (A_1) o (A_2) tals que l'origen no és un atractor global (vegeu les proposicions 16 i 17). Quant a la condició (B_2), sí que obtenim un resultat afirmatiu per a tot $n \geq 2$ en el cas que F sigui polinomial. El problema resta obert per a aplicacions de classe C^1 que satisfan (B_2).

Per construir els exemples polinomials ens serà molt útil el lema següent, generalització del lema 10.

LEMA 14. *Sigui $A(\mathbf{x})$ una matriu amb entrades polinomials tal que el conjunt de tots els valors propis de $A(\mathbf{x})$ per a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és un conjunt fitat. Aleshores, el polinomi característic de $A(\mathbf{x})$ és independent de \mathbf{x} .*

La prova es basa en el mateix: no hi ha polinomis fitats.

En el cas més simple, $n = 2$, podem considerar

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} C + p(x, y) & q(x, y) \\ r(x, y) & C - p(x, y) \end{pmatrix},$$

on $r(x, y)q(x, y) = D^2 - p^2(x, y)$ i C i D són constants. Aleshores, $t_1 = 2C$ i $t_2 = C^2 - D^2$. Per tant, els valors propis són $C \pm D$, que no depenen de (x, y) .

Per explicitar exemples que satisfan la condició (A_1) , prendrem $A(x, y)$ de la forma anterior amb la condició $|C \pm D| < 1$. Per exemple, podem prendre $C = D = 0$, $q(x, y) = 1$ i $r(x, y) = -p^2(x, y)$. Ara imposem que aquestes aplicacions $F(x, y) = A(x, y)(x, y)^T$ tinguin punts periòdics.

LEMA 15. *Si sigui $F(x, y) = A(x, y)(x, y)^T$, on*

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} p(x, y) & 1 \\ -p^2(x, y) & -p(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si sigui $(x_0, y_0) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ i anomenem $p_n := p(x_n, y_n)$, on (x_n, y_n) és l'iterat n -èsim de (x_0, y_0) per F . Aleshores, (x_0, y_0) és un punt periòdic de període k de F si i només si

- (i) $y_k = -p_{k-1}x_0$,
- (ii) $(p_0 - p_{k-1})(p_1 - p_0)(p_2 - p_1) \cdots (p_{k-1} - p_{k-2}) = 1$.

PROVA. Iterant k vegades l'aplicació F , un càlcul simple dona

$$\begin{aligned} y_k &= -p_{k-1}x_k, \\ x_k &= (p_{k-1} - p_{k-2})(p_{k-2} - p_{k-3}) \cdots (p_2 - p_1)(p_1 - p_0)(p_0x_0 + y_0). \end{aligned}$$

Com que (x_0, y_0) té període k , $(x_k, y_k) = (x_0, y_0)$, i obtenim així les dues igualtats anunciades. \square

És clar a partir del lema anterior que no podem tenir punts periòdics de període 2, però sí que en podem tenir de període k , amb $k \geq 3$. Podem obtenir un exemple simple prenent $k=4$, amb $p_1 = p_3 = 1$ i $p_0 = p_2 = 0$. Començant a $(x_0, y_0) = (1, -1)$, tenim que $F(1, -1) = (-1, 0)$, $F(-1, 0) = (-1, 1)$, $F(-1, 1) = (1, 0)$, $F(1, 0) = (1, -1)$. Hem de trobar, doncs, un polinomi $p(x, y)$ tal que $p(1, -1) = p(-1, 1) = 0$ i $p(-1, 0) = p(1, 0) = 1$. El més senzill és $p(x, y) = x(x + y)$.

PROPOSICIÓ 16. *Per a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sigui $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, on*

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -(x_1^2 + x_1x_2)^2 & -(x_1^2 + x_1x_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, F satisfà la hipòtesi (A_1) i té punts periòdics de període 4. En particular, l'origen no és un atractor global.

PROVA. Com que el polinomi característic de $A(\mathbf{x})$ és $P(\lambda) = \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n t_n$ i $t_i = 0$ per a tot $i = 1, 2, \dots, n$, tenim que $A(\mathbf{x})$ satisfà la hipòtesi (A_1) . I l'òrbita que comença a $(1, -1, 0, \dots, 0)$ és periòdica de període 4. \square

Pel que fa a la condició (A_2) , considerem $A(x, y)$ de la forma

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ r(x, y) & b \end{pmatrix},$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ i $r(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$. La matriu $|A(x, y)|$ satisfà la condició (A_2) si $|a| < 1$ i $|b| < 1$. Podem veure que la hipèrbola $xy - 1 = 0$ és invariant per $F(x, y) = A(x, y)(x, y)^T$ (és a dir, que si un punt (x, y) del pla està sobre la hipèrbola $xy - 1 = 0$, aleshores la seva imatge també ho està) si i només si $ax^2r(x, \frac{1}{x}) = 1 - ab$. Per tant, si escollim $r(x, y) = \frac{1-ab}{a}xy^3$, aleshores l'origen no serà un atractor global de l'aplicació corresponent. Prenent $a = b = \frac{1}{2}$, escrivim la versió n -dimensional d'aquesta aplicació.

PROPOSICIÓ 17. *Si $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, on*

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3}{2}x_1x_2^3 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, F satisfà la condició (A_2) i la corba $\{(z, \frac{1}{z}, 0, \dots, 0), z \in \mathbb{R}\}$ és invariant per F . En particular, l'origen no és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per les iteracions de F .

PROVA. Els valors propis de la matriu $|A(\mathbf{x})|$ són $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_j = 0$ per a tot $j = 3, \dots, n$. Per tant, F satisfà la condició (A_2) . A més, $F(z, 1/z, 0, \dots, 0) = (z/2, 2/z, 0, \dots, 0)$, fet que prova el resultat. \square

Ara passem a donar respostes positives al problema de l'atracció global. Com dèiem al principi d'aquesta secció, si la condició (B_2) se satisfà i F és un polinomi, aleshores l'origen és un atractor global. Per a fer la prova, necessitem veure quina estructura tenen els polinomis que satisfan (B_2) . Ens calen algunes definicions. Per posar-ho en un marc més general, denotarem per \mathbb{K} un dels cossos \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} . Considerem $M = M(\mathbf{x})$ una matriu $n \times n$ amb coeficients a l'anell de polinomis $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, on $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Un *menor diagonal* de M és un menor que té la diagonal inclosa en la diagonal de M . Si denotem per $a_i^j = a_i^j(\mathbf{x})$ l'element que és a la fila i i a la columna j de M , un *producte elemental de llargada k* és un element que s'escriu com

$$a_{\sigma(i_1)}^{i_1} a_{\sigma(i_2)}^{i_2} \dots a_{\sigma(i_k)}^{i_k},$$

on i_1, i_2, \dots, i_k són k elements diferents de $I = \{1, 2, \dots, n\}$ i $\sigma \in S_k$, el grup simètric de k elements. Direm que M és *triangular per blocs* si existeix una partició I_1, I_2, \dots, I_k de I tal que

$$a_i^j \begin{cases} = 0 & \text{si } i \in I_r, j \in I_s \text{ i } r < s, \\ \in \mathbb{K} & \text{si } i, j \in I_r \text{ per a algun } r. \end{cases}$$

Notem que després de reordenar els índexs, una matriu triangular per blocs és de la forma

$$\left(\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{ccc} b_1^1 & \dots & b_1^{p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p_1}^1 & \dots & b_{p_1}^{p_1} \end{array} \right) & & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \left(\begin{array}{ccc} b_{p_1+1}^{p_1+1} & \dots & b_{p_1+1}^{p_1+p_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p_1+p_2}^{p_1+1} & \dots & b_{p_1+p_2}^{p_1+p_2} \end{array} \right) & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \left(\begin{array}{ccc} b_{n-p_k+1}^{n-p_k+1} & \dots & b_{n-p_k+1}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n^{n-p_k+1} & \dots & b_n^n \end{array} \right) \end{array} \right),$$

on $b_i^j = a_{\sigma(i)}^{\sigma(j)}$ per a alguna permutació σ , i les entrades de les submatrius de la diagonal són elements de \mathbb{K} .

La proposició següent relaciona les nocions anteriors amb la condició (B_2) . De fet, el que fa és caracteritzar les aplicacions triangulars per blocs. I ens permetrà usar que, si $F(\mathbf{x})$ es pot escriure com $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$ i satisfà la condició (B_2) , aleshores $A(\mathbf{x})$ és triangular per blocs. No en donarem la demostració, ja que és força feixuga; la trobareu a [7].

PROPOSICIÓ 18. *Si $M = M(\mathbf{x})$ una matriu d'ordre m amb entrades a $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, on $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$. Les condicions següents són equivalents:*

- (i) *Existeix un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, per a cada $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^m$, tot valor propi $\lambda(\mathbf{x})$ de $|M(\mathbf{x})|$ compleix $|\lambda(\mathbf{x})| < \alpha$.*
- (ii) *Cada producte elemental de M pertany a \mathbb{K} .*
- (iii) *$\det N \in \mathbb{K}$ per a tot N menor diagonal de M .*
- (iv) *La matriu M és triangular per blocs.*
- (v) *El polinomi característic de $|M(\mathbf{x})|$ té tots els coeficients a \mathbb{K} .*
- (vi) *Els valors propis de $|M(\mathbf{x})|$ no depenen de \mathbf{x} .*

També necessitarem el lema següent que, essencialment, està provat a [16]. Recordem que el radi espectral d'una matriu quadrada A es defineix $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ és un valor propi de } A\}$.

LEMA 19. *Si A una matriu quadrada d'ordre n . Aleshores*

$$\rho(A) \leq \rho(|A|).$$

PROVA. Seguint [16], direm que A és reductible si podem trobar una permutació que, en aplicar-la a les files i a les columnes de A , obtenim una matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

on B i D són matrius quadrades. Si una matriu no és reductible, s'anomena *irreductible*. Per a matrius irreductibles, un resultat més fort que el que hem anunciat està provat a la secció 2 de [16]. Per tant, només hem de provar el lema per a matrius reductibles. Observem que el conjunt de valors propis de la matriu A és la unió dels conjunts de valors propis de les matrius B i D . Per tant, podem reduir l'estudi a matrius d'ordre més petit. Cadascuna de les noves matrius és reductible o irreductible. En el segon cas, ja acabem la prova. En el primer, continuem aquest procés fins que arribem a una matriu irreductible. \square

Ara ja tenim les eines a punt per a provar el teorema principal d'aquesta secció.

TEOREMA 20. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació polinomial que satisfà la condició (B_2) i tal que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Aleshores, l'origen és un atractor global del sistema dinàmic discret generat per les iteracions de F .*

PROVA. Sigui F tal que tots els valors propis de $|JF(\mathbf{x})|$ tenen mòdul més petit que 1. Per la proposició 18, sabem que la matriu $JF(\mathbf{x})$ és triangular per blocs. A més, el lema 19 implica que té tots els valors propis de mòdul més petit que 1. Per tant, existeix una base de \mathbb{R}^n tal que l'aplicació $F(\mathbf{x})$ es pot escriure com

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}), F_m(x_1, x_2, \dots, x_m)) = \\ &= (\Lambda_1 x_1, \Lambda_2 x_2 + t_2(x_1), \Lambda_3 x_3 + t_3(x_1, x_2), \dots, \\ &\quad \Lambda_{m-1} x_{m-1} + t_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}), \Lambda_m x_m + t_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})), \end{aligned} \tag{9}$$

on cada $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^n$, Λ_i són matrius reals $n_i \times n_i$ i t_i són polinomis. A més, els valors propis de cada matriu Λ_i tenen mòdul més petit que 1. L'expressió anterior de $F(\mathbf{x})$ és el punt clau de la prova, que és similar a la del teorema 12.

Notem que podem descriure \mathbb{R}^n com la suma directa de \mathbb{R}^{n_i} per a $i = 1, 2, \dots, m$. D'altra banda, com que cada matriu Λ_i té radi espectral més petit que 1, és conegut que, a cada \mathbb{R}^{n_i} , podem considerar una norma $|\cdot|_i$ tal que

$$|\Lambda_i x_i|_i \leq d_i |x_i|_i, \tag{10}$$

amb $|d_i| < 1$. Definim $D = \max\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Aquestes normes indueixen una norma a l'espai total que anomenarem $|\cdot|$.

Fixem una condició inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ i demostrem que $|\mathbf{x}^{(k)}| = |F^k(\mathbf{x}^{(0)})|$ tendeix a zero quan k tendeix a infinit. Ho provarem per inducció sobre el nombre de components de $F(\mathbf{x})$. Demostrarem per inducció el resultat següent, que implica el teorema 20.

Existeixen $M > 0$ i $0 \leq K < 1$ tals que per a cada natural k , $|x_i^{(k)}| \leq MK^k$ per a cada $i = 1, 2, \dots, s$.

Per a $s = 1$, la prova és immediata gràcies a (10). Suposem, doncs, que el resultat és cert per a $i < s$ i provem-lo per a $i = s$. Per la hipòtesi d'inducció sabem que, per a tot k , per a tot $i < s$ i per a tot $t \in [0, 1]$, els vectors $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, tx_i^{(k)}, 0, \dots, 0)$ estan continguts en un compacte L . Considerem

$$\begin{aligned}
 |x_s^{(k)}| &= |F_s(\mathbf{x}^{(k-1)})| = \\
 &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_s(x_1^{(k-1)}, \dots, tx_s^{(k-1)}) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_s(x_1^{(k-1)}, \dots, tx_{s-1}^{(k-1)}, 0) dt + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_s(tx_1^{(k-1)}, 0, \dots, 0) dt \right| \leq \\
 &\leq D|x_s^{(k-1)}| + \bar{M}\{|x_{s-1}^{(k-1)}| + |x_{s-2}^{(k-1)}| + \dots + |x_1^{(k-1)}|\} \leq \\
 &\leq D|x_s^{(k-1)}| + (s-1)\bar{M}MK^{j-1},
 \end{aligned} \tag{11}$$

on \bar{M} és el valor màxim de les normes de les funcions contínues $\frac{\partial F_s}{\partial x_1}, \frac{\partial F_s}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}$ sobre el compacte L . Per tant, segons l'expressió anterior,

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + (s-1)\bar{M}MK^{k-1}.$$

Si anomenem $C = (s-1)\bar{M}M$, tenim la desigualtat

$$|x_s^{(k)}| \leq D|x_s^{(k-1)}| + CK^{k-1}, \tag{12}$$

on remarquem que K i D estan entre 0 i 1. Observem que aquesta desigualtat és la mateixa que (8). Usant, doncs, els mateixos arguments iteratius que en la prova del teorema 12, s'acaba la demostració. \square

5 Atracció global per a equacions en diferències

En aquesta secció estudiem condicions d'atracció global per a successions recurrents, també anomenades *equacions en diferències*.

Considerem una equació en diferències d'ordre n :

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{13}$$

on $x_i \in \mathbb{R}$ i $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és de classe C^1 .

Per a estudiar el comportament de les successions generades per (13), cal estudiar la dinàmica generada per les iteracions de

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, f(x_1, x_2, \dots, x_n)). \quad (14)$$

Considerem, doncs, el problema de l'atracció global per a aplicacions de la forma (14), amb $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ (és a dir, $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) tals que satisfan alguna de les condicions (A_1) , (A_2) , (B_1) o (B_2) .

Veurem que, per a aquest tipus d'aplicacions, les condicions (A_2) i (B_2) impliquen l'existència d'atractor global, mentre que per a les condicions (A_1) i (B_1) mostrarem contraexemples a l'atracció global.

La condició (B_1) no implica l'existència d'atractor global. A l'article [8] es presenta l'exemple

$$F(x, y) = (y, 2e^{-y^2} - bx).$$

Per a $b \in (\frac{2}{e}, 1)$, F té un únic punt fix i satisfà la condició (B_1) .

Es pot veure que per a b més petita i pròxima a 1, F té punts periòdics de període 3 i, per tant, el punt fix no és un atractor global. El comportament dinàmic de F és molt complicat, ja que F es pot veure com un *twist* pertorbat; vegeu l'article [8] per als detalls.

A la figura 1 mostrem centenars d'iterats de tres òrbites de F per a $b = 0.999$.

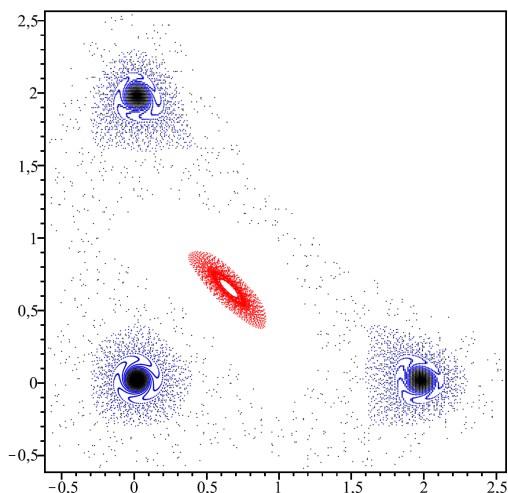


FIGURA 1: Tres òrbites de F per a $b = 0.999$.

En aquest article presentem un exemple d'una aplicació racional senzilla que satisfà (B_1) i que té punts periòdics (vegeu [9]).

Considerem

$$F(x, y) = \left(y, \frac{a}{(1+y^2)^2} - bx \right), \quad (15)$$

amb els paràmetres $a, b > 0$. És fàcil veure que, per a tot $b \neq -1$, F té un únic punt fix: és el punt (x_0, x_0) , on x_0 és l'únic punt d'intersecció entre les gràfiques de $p(x) := (b+1)x$ i $q(x) := \frac{a}{(1+x^2)^2}$; és a dir, $\frac{a}{(1+x_0^2)^2} = (b+1)x_0$. La matriu jacobiana de F és:

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & \frac{-4ay}{(y^2+1)^3} \end{pmatrix}.$$

Les condicions necessàries i suficients perquè el polinomi característic d'una matriu tingui totes les arrels en el disc unitat es coneixen com les *condicions de Jury*; vegeu, per exemple, [3, 26] i les seves referències. Per a matrius d'ordre 2, es resumeixen en $|\tau| < 1 + \Delta < 2$, on τ, Δ són la traça i el determinant de la matriu, respectivament. Per a la nostra matriu, la traça, que depèn de (x, y) , ve donada per $\tau = \frac{-4ay}{(y^2+1)^3}$. Aquesta funció pren com a valor màxim

$$\frac{25\sqrt{5}}{54}|a| = \sqrt{\frac{3125}{2916}}|a|.$$

Obtenim, doncs, que per a tot (x, y) del pla se satisfà $|\tau| \leq \sqrt{\frac{3125}{2916}}|a|$. Prenent a, b amb les condicions

$$|a| < \sqrt{\frac{11\,664}{3125}} \approx 1.93 \quad \text{i} \quad b \in \left(\frac{3125}{11\,664}a^2, 1 \right), \quad (16)$$

assegurem que F satisfà (B_1) .

Després d'un estudi numèric hem obtingut que, per a $a = 9/5$ i $b = 9/10$, l'aplicació (15) té un punt fix a $\mathbf{p} \approx (0.554\,338, 0.554\,338)$ i una òrbita de període 3 que conté $\mathbf{q} \approx (-0.097\,039, 0.241\,179)$. A més, per a aquests valors de a i b se satisfan les desigualtats (16).

Provar analíticament l'existència de \mathbf{q} no és una tasca fàcil, ja que és la solució de dues equacions polinomials de graus 21 i 89. Basant-nos en aquests càlculs, canviem l'estratègia. Forçarem que F tingui una òrbita de període 3 en el punt $(\frac{-1}{10}, \frac{1}{4})$, que és a prop del punt \mathbf{q} , i considerarem a i b com a incògnites. Anomenem $g(a, b)$ i $h(a, b)$ els numeradors de la primera i la segona components de l'equació:

$$F^3 \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{4} \right) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{4} \right).$$

Les funcions g i h són polinomis en les dues variables a, b de graus 5 i 22, respectivament. Per trobar els valors (a, b) que satisfan aquestes dues equacions, considerem les equacions polinomials següents:

$$U(a) := \text{Res}(g, h; b) = 0, \quad V(b) := \text{Res}(g, h; a) = 0,$$

on $\text{Res}(\cdot, \cdot; c)$ denota la resultant respecte a c . Recordem que la resultant de dos polinomis d'una variable és un número, que és zero si i només si els dos polinomis tenen una arrel en comú. Calculant aquestes resultants amb l'ajut de programari de càlcul simbòlic, obtenim:

$$U(a) = a^{16}U_5(a) \quad \text{i} \quad V(b) = (b^2 + 100)^8V_5(b),$$

on U_5 i V_5 són polinomis de grau 5 amb coeficients naturals molt grans, de l'ordre de 10^{30} . Comprovant que $U_5(17/10) \cdot U_5(18/10) < 0$ i que $V_5(89/100) \cdot V_5(90/100) < 0$, i aplicant el teorema de Bolzano, podem afirmar que existeixen $a = a^*$ i $b = b^*$ que satisfan

$$U_5(a^*) = 0, \quad V_5(b^*) = 0, \quad \text{i} \quad a^* \in \left(\frac{17}{10}, \frac{18}{10}\right), \quad b^* \in \left(\frac{89}{100}, \frac{90}{100}\right). \quad (17)$$

Efectivament, $a^* \simeq 1.783\,274$ i $b^* \simeq 0.897\,416$. Finalment, notem que $a^* < 1.8$, $b^* < 1$ i

$$b^* > \frac{89}{100} > \frac{3125}{11\,664} \left(\frac{18}{10}\right)^2 > \frac{3125}{11\,664} (a^*)^2.$$

Per tant, per a aquests valors dels paràmetres, les condicions (16) es compleixen i l'aplicació F satisfà (B_1) . Així, hem provat el resultat següent:

PROPOSICIÓ 21. *Considerem valors de a^* i b^* que compleixin (17). Aleshores, l'aplicació*

$$F(x, y) = \left(y, \frac{a^*}{(1 + y^2)^2} - b^*x\right)$$

satisfà (B_1) , té un punt fix i un punt periòdic de període 3. En particular, el punt fix no és un atractor global de la dinàmica generada per les iteracions de F .

NOTA. A la proposició 3.1 de l'article [17], de 2020, els autors consideren la família 1-paramètrica d'aplicacions $F(x, y) = (y, -bx + \frac{2b}{(1+y^2)^2})$. Aplicant el teorema de Poincaré-Miranda proven l'existència d'una òrbita periòdica de període 3 per a valors de $b \in [113/128, 2916/3125]$ i comproven que, per a aquests valors de b , F satisfà les hipòtesis del problema discret de Markus-Yamabe. Aquesta família inclou el nostre exemple numèric amb $a = 9/5$ i $b = 9/10$.

Ara mostrarem que la mateixa aplicació de la proposició 21 ens serveix per a refutar l'atracció global quan F satisfà la condició (A_1) . Recordem-la: si escrivim $F(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\mathbf{x}$, aleshores $\rho(A(\mathbf{x})) < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Traslladant el punt fix (x_0, x_0) a l'origen, obtenim l'aplicació $G(x, y)$ conjujada de $F(x, y)$ següent:

$$G(x, y) = \left(y, -b^*x + \frac{a^*}{(1 + (y + x_0)^2)^2} - (1 + b^*)x_0\right),$$

on x_0 satisfà $\frac{a^*}{(1+x_0^2)^2} = (1+b^*)x_0$; és a dir, $G(0,0) = (0,0)$. Observem que $G(x,y)$ té la forma $G(x,y) = (y, -b^*x + h(y))$ i, per tant, la podem descriure com $A(\mathbf{x})\mathbf{x}$:

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b^* & \frac{h(y)}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Com que per a la nostra aplicació $h(0) = 0$, per a cada $y \in \mathbb{R}$, aplicant el teorema del valor mitjà, obtenim $h(y) - h(0) = h'(z)y$; és a dir, $h(y)/y = h'(z)$ per a un valor z que es troba entre 0 i y . Això vol dir que, per a cada y , es compleix $A(x,y) = DG(x,z)$. Com que $\rho(DG(\mathbf{x})) < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, deduïm que $\rho(A(\mathbf{x})) < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$; és a dir, que $G(x,y)$ satisfà la condició (A_1) . Hem provat, doncs, el resultat següent:

PROPOSICIÓ 22. *Donades a^* i b^* que compleixen (17), l'aplicació*

$$G(x,y) = \left(y, -b^*x + \frac{a^*}{(1+(y+x_0)^2)^2} - (1+b^*)x_0 \right)$$

satisfà (A_1) , té el $(0,0)$ com a punt fix i té una òrbita periòdica de període 3. En particular, l'origen no és un atractor global de la dinàmica generada per les iteracions de G .

Ara analitzarem la condició (B_2) . Per a equacions en diferències sí que hem provat l'existència d'atractor global si la F corresponent satisfà la condició (B_2) . El resultat el dona el teorema següent; noteu que proporciona una condició equivalent a (B_2) més fàcil de comprovar.

Com a la secció anterior, donada una matriu A , anomenem $\rho(A)$ el seu radi espectral.

TEOREMA 23. *Si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$*

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)),$$

amb $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Aleshores, les dues condicions següents són equivalents:

(H_1) *F satisfà la condició (B_2) ; és a dir, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < 1$.*

(H_2) *Per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,*

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < 1. \tag{18}$$

A més, si aquestes condicions se satisfan i F té un punt fix, aleshores aquest punt fix és un atractor global de la dinàmica discreta generada per F .

El resultat anterior estén un criteri d'atracció global ja conegut per a equacions en diferències lineals; vegeu [10, 24, 27]. La condició (18), només exigida al punt fix, ja apareix a [32] per a obtenir resultats d'atracció local.

Alguns comentaris sobre el teorema 23:

- La hipòtesi de tenir un punt fix no es pot obviar; vegeu el lema 26.
- Si la hipòtesi (H_1) es canvia per $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < K < 1$, o la hipòtesi (H_2) per $\sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})| < K < 1$, aleshores sí que podem treure la hipòtesi que F tingui un punt fix; vegeu el lema 26.
- Si prenem F lineal, amb $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, $a_i \geq 0$, és fàcil veure que, si $\rho(|DF(\mathbf{x})|) \geq 1$, o, equivalentment, $\sum_{i=1}^n |\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})| \geq 1$, aleshores l'origen no és un atractor global; vegeu també [33].

Els propers resultats es poden veure com una demostració simple i auto-continguda de les condicions de Jury per a una classe particular de polinomis. De fet, el lema següent també es pot provar aplicant el teorema de Perron-Frobenius a la matriu

$$A_P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

ja que, si tenim en compte les hipòtesis del lema, és una matriu no negativa i el seu polinomi característic és $(-1)^n(\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i) = (-1)^n P(\lambda)$. Donat un polinomi P , definim $\rho(P) = \max\{|\lambda| : P(\lambda) = 0\}$.

LEMA 24. *Sigui $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ un polinomi amb $a_i \leq 0$ per a tot i , amb $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0$. Aleshores P té una única arrel real positiva, α , i $\rho(P) = \alpha$.*

PROVA. Aplicant la regla de Descartes, sabem que P té una única arrel positiva, diguem-ne α . Sigui β una altra arrel de P (real o complexa) i suposem, per arribar a contradicció, que $|\beta| > \alpha$. Com que $1 = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \beta^{i-n}$, amb $i - n < 0$, obtenim

$$1 \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |\beta|^{i-n} < \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \alpha^{i-n} = 1,$$

una contradicció. Per tant, $\rho(P) = \alpha$. □

El lema anterior estén alguns resultats de [33], on es tracta el cas $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$.

NOTA. Sigui $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ un polinomi amb $a_i \leq 0$ per a tot i . Pel lema 24, quan $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0$, o directament si aquesta suma és zero, es compleix el següent: donada $K > 0$, $\rho(P) < K$ si i només si $P(K) > 0$. Precisament, $P(1) > 0$ és la primera condició de Jury, que, per a aquesta classe de polinomis, és també suficient per a caracteritzar $\rho(P) < 1$.

El proper resultat relaciona $\rho(P)$ i $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$. Per $a, b \in \mathbb{R}$, denotem per $\langle a, b \rangle$ l'interval tancat amb extrems a i b .

PROPOSICIÓ 25. Sigui $P(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$ un polinomi amb $a_i \leq 0$ per a tot i . Aleshores:

(i) Si $\rho(P) = K < 1$, aleshores $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \leq K$.

(ii) Si $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = K$, aleshores $\rho(P) \in \langle K, \sqrt[n]{K} \rangle$.

PROVA. Si tots els a_i són zero, el resultat és trivial ja que aquesta condició és equivalent a $\rho(P) = 0$. Suposem, doncs, que $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \neq 0$.

(i) Pel lema 24 sabem que $P(K) = 0$; és a dir, $K^n = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| K^i$. Dividint aquesta igualtat per K^{n-1} , obtenim

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| K^{i-n+1} \geq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|,$$

tal com volíem veure.

(ii) Si $K = 1$, el resultat se segueix directament. Si $K < 1$,

$$P(\sqrt[n]{K}) = K - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| K^{\frac{i}{n}} \geq K - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| = 0,$$

$$\frac{P(K)}{K^{n-1}} = K - |a_{n-1}| - \sum_{i=0}^{n-2} |a_i| K^{i-n+1} \leq K - |a_{n-1}| - \sum_{i=0}^{n-2} |a_i| = 0,$$

i el resultat és una conseqüència del lema 24. Quan $K > 1$, seguim els mateixos passos per a obtenir les desigualtats revertides. \square

Ara ja tenim els preliminars per a provar el teorema 23.

PROVA DEL TEOREMA 23. Primer provarem que (H_1) i (H_2) són equivalents. El polinomi característic de $|DF(\mathbf{x})|$ és

$$(-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| \lambda^{i-1} \right) := (-1)^n P_{\mathbf{x}}(\lambda).$$

Ja sabem que $\rho(|DF(\mathbf{x})|) = \rho(P_{\mathbf{x}}) < 1$ si i només si $P_{\mathbf{x}}(1) > 0$, que és equivalent a $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < 1$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, com volíem veure.

Per a provar la segona part del teorema, notem que, si \mathbf{p} és el punt fix, necessàriament $\mathbf{p} = (p, \dots, p)$ per a algun $p \in \mathbb{R}$. Aleshores, conjugant F amb una translació, podem suposar que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

Sigui $V(x_1, \dots, x_n) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Demostrarem que V és una funció de Liapunov estricta per a F^n , fet que implicarà que l'origen és un atractor global per F^n . Clarament, aquest resultat implica l'atracció global per F . Per a $i = 1, \dots, n$, sigui $x_{n+i} = f(x_i, \dots, x_{n+i-1})$. Afirmem que

$$|x_{n+i}| < \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = V(x_1, \dots, x_n),$$

per a tot $i = 1, \dots, n$.

Per a $i = 1$, tenim

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} (f(sx_1, \dots, sx_n)) ds \right| = \left| \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (sx_1, \dots, sx_n) x_i \right) ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (sx_1, \dots, sx_n) \right| \right) ds \leq \\ &\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (sx_1, \dots, sx_n) \right| \right) ds < \\ &< \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}. \end{aligned}$$

Hem demostrat, doncs, l'afirmació per a $i = 1$. Ara suposem que l'afirmació és certa per a i i provem-la per a $i + 1$. Argumentant com abans, obtenim que

$$|x_{n+i+1}| < \max\{|x_{i+1}|, \dots, |x_{n+i}|\}.$$

Per tant, pel principi d'inducció tenim que $|x_{n+j}| < V(x_1, \dots, x_n)$ per a tot $1 \leq j \leq i$ i $|x_l| \leq V(x_1, \dots, x_n)$ per a $l \in \{1, \dots, n\}$. Això acaba la prova de l'afirmació anterior. Per tant,

$$V(F^n(x_1, \dots, x_n)) = V(x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \max\{|x_{n+1}|, \dots, |x_{2n}|\} < V(x_1, \dots, x_n),$$

fet que prova que V és decreixent sobre les òrbites de F^n . Com que, a més, $V(\mathbf{x}) = 0$ si i només si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, i $V(\mathbf{x}) \geq 0$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tenim que V és una funció de Liapunov estricta per a F^n i acabem la demostració. \square

L'exemple següent mostra que l'existència del punt fix és imprescindible perquè la tesi del teorema sigui certa.

LEMA 26. *L'aplicació* $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_2, x_3, \dots, \ln\left(1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}\right) \right),$$

no té punts fixos. A més, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *les matrius* $DF(\mathbf{x})$ *i* $|DF(\mathbf{x})|$ *tenen tots els seus valors propis de mòdul més petit que 1.*

PROVA. L'equació $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ implica $\mathbf{x} = (x, x, \dots, x)$ i $x = \ln(1 + e^x)$, que no té solució. Per tant, F no té punts fixos.

Notem que $DF(\mathbf{x}) = |DF(\mathbf{x})|$ i que el polinomi característic d'aquesta matriu és

$$P_{\mathbf{x}}(\lambda) = \lambda^n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}}{1 + e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}} \lambda^{i-1}.$$

Aleshores, $P_{\mathbf{x}}(1) > 0$ i totes les hipòtesis del lema 24 es compleixen. Per tant, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(A(\mathbf{x})) < 1$, tal com volíem provar. \square

En contrast amb el resultat anterior, una condició una mica més forta que (H_1) , o (H_2) , assumida en el teorema 23, sí que força l'existència del punt fix.

TEOREMA 27. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com al teorema 23. Aleshores les dues condicions següents són equivalents:*

(i) *Existeix $\tilde{K} < 1$ tal que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < \tilde{K}$.*

(ii) *Existeix $K < 1$ tal que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < K$.*

A més, si aquestes condicions se satisfan, aleshores F té un punt fix que és un atractor global de la dinàmica generada per F .

PROVA. (i) \Rightarrow (ii) Per hipòtesi,

$$\rho(|DF(\mathbf{x})|) = \rho \left(\lambda^n - \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| \lambda^{i-1} \right) < \tilde{K} < 1.$$

Prenent K tal que $\tilde{K} < K < 1$ i usant la proposició 25(i), obtenim

$$\sum_{i=1}^n |D_i(f)(\mathbf{x})| < \tilde{K} < K < 1.$$

(ii) \Rightarrow (i) Suposem que per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < K < 1$. De la proposició 25(ii), tenim que $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < \sqrt[n]{K} < 1$ i se segueix la implicació.

Finalment, gràcies al teorema 23, per a acabar la demostració, hem de provar que F té un punt fix. Suposem que (ii) és certa. Hem de provar que l'equació $g(x) := f(x, \dots, x) = x$ té alguna solució. Com que

$$|g'(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \dots, x) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \dots, x) \right| < K < 1,$$

se segueix que g és una contracció i, per tant, té un punt fix p . Aleshores, (p, \dots, p) és un punt fix per a F , i acabem la demostració. \square

Usant les eines introduïdes en aquesta secció, es pot provar el resultat següent, que dona una resposta afirmativa al problema de l'atracció global per a aplicacions de tipus (13) que satisfan (A_2) .

TEOREMA 28. *Sigui $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicació de la forma*

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)),$$

amb $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Suposem que $F(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\mathbf{x}$ i que, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho(|B(\mathbf{x})|) < 1$. Aleshores, l'origen és un atractor global per la dinàmica discreta generada per F .

6 Comentaris finals

En aquest article hem donat diferents hipòtesis sobre sistemes dinàmics discrets i continus que impliquen l'existència d'un atractor global. Com ja dèiem a la introducció, aquest tipus de resultats són molt útils en les aplicacions, ja que permeten modelar processos que, amb els paràmetres adequats, donaran com a resultat l'existència d'un equilibri global.

A la literatura apareixen punts d'equilibri de sistemes dinàmics que són punts localment asimptòticament estables. Són atractors locals que, al seu torn, són estables en el sentit de Liapunov. I els punts globalment asimptòticament estables són punts estables que són atractors globals del sistema. Tots els resultats presentats en aquest article que demostren l'existència d'un atractor global, de fet, es refereixen a punts globalment asimptòticament estables. El motiu d'això és que els punts són estables pel teorema de linealització.

Tenint en compte els resultats que hem exposat, cal remarcar que hem provat que si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és de classe C^1 , té un punt fix, i alguna de les hipòtesis següents és certa:

- $n = 1$,
- F és triangular,
- F és polinomial,
- F és de la forma (14),

aleshores, la condició (B_2) : $\rho(|DF(\mathbf{x})|) < 1$ implica que el punt fix és globalment asimptòticament estable. Però no hem provat que la tesi sigui certa per a aplicacions de classe C^1 amb un punt fix que satisfan la condició (B_2) . Deixem, doncs, aquest problema obert.

Referències

- [1] BERNAT, J.; LLIBRE, J. «Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3». *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, 2 (3) (1996), 337-379.
- [2] BISCHI, G. I.; CHIARELLA, C.; KOPEL, M.; SZIDAROVSKY, F. *Nonlinear Oligopolies. Stability and Bifurcations*. Berlín: Springer-Verlag, 2010.
- [3] CHOO, Y. «An elementary proof of the Jury test for real polynomials». *Automatica J. IFAC*, 47 (1) (2011), 249-252.
- [4] CIMA, A.; VAN DEN ESSEN, A.; GASULL, A.; HUBBERS, E.; MAÑOSAS, F. «A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe conjecture». *Adv. Math.*, 131 (2) (1997), 453-457.
- [5] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «A polynomial class of Markus-Yamabe counterexamples». *Proceedings of the Symposium on Planar Vector Fields* (Lleida, 1996). *Publ. Mat.*, 41 (1) (1997), 85-100.
- [6] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «The discrete Markus-Yamabe problem». *Nonlinear Anal., Ser. A: Theory Methods*, 35 (3) (1999), 343-354.

- [7] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «A note on LaSalle's problems». Polynomial automorphisms and related topics (Kraków, 1999). *Ann. Polon. Math.*, 76 (1-2) (2001), 33-46.
- [8] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «Examples and counterexamples for Markus-Yamabe and LaSalle global asymptotic stability problems». A: *Proceedings of the Workshop Future Directions in Difference Equations*. Vigo: Universidade de Vigo. Servizo de Publicacións, 2011, 89-96. (Congresos; 69)
- [9] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «On the global asymptotic stability of difference equations satisfying a Markus-Yamabe condition». *Publ. Mat.*, vol. extra (2014), 167-178.
- [10] CLARK, C. W. «A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to baleen whale populations». *J. Math. Biol.*, 3 (3-4) (1976), 381-391.
- [11] DILLEN, F. «Polynomials with constant Hessian determinant». *J. Pure Appl. Algebra*, 71 (1) (1991), 13-18.
- [12] DO CARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1976. [Traduït del portuguès]
- [13] DRUŻKOWSKI, L. M. «An effective approach to Keller's Jacobian conjecture». *Math. Ann.*, 264 (3) (1983), 303-313.
- [14] FESSLER, R. «A proof of the two-dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization». *Ann. Polon. Math.*, 62 (1) (1995), 45-74.
- [15] GANDOLFO G. *Economic Dynamics*. Berlín: Springer Verlag, 1996.
- [16] GANTMACHER, F. R. *The Theory of Matrices*. Vol. 1, 2. Nova York: Chelsea Publishing Co., 1959. [Traduït per K. A. Hirsch]
- [17] GASULL, A.; MAÑOSA, V. «Periodic orbits of discrete and continuous dynamical systems via Poincaré-Miranda theorem». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 25 (2) (2020), 651-670.
- [18] GLUTSYUK, A. A. «The asymptotic stability of the linearization of a vector field on the plane with a singular point implies global stability». En rus. *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 29 (4) (1995), 17-30; traducció a: *Funct. Anal. Appl.*, 29 (4) (1995), 238-247.
- [19] GRÖLL, L. *Methodik zur Integration von Vorwissen in die Modellbildung*. Karlsruhe Scientific Publishing, 2015.
- [20] GUTIÉRREZ, C. «A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12 (6) (1995), 627-671.
- [21] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. Nova York; Londres; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [22] HOFBAUER, J.; SIGMUND, K. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

- [23] JÖRGENS, K. «Über die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$ ». *Math. Ann.*, 127 (1954), 130-134.
- [24] KOCIĆ, V. L.; LADAS, G. *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1993. (Mathematics and its Applications; 256)
- [25] LASALLE, J. P. *The Stability of Dynamical Systems*. Amb un apèndix: «Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations», per Z. Artstein. Filadèlfia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976. [Regional Conference Series in Applied Mathematics]
- [26] LEWIS, R. *Network Models in Population Biology*. Berlín; Nova York: Springer-Verlag, 1977. (Biomathematics; 7)
- [27] LIZ, E. «On explicit conditions for the asymptotic stability of linear higher order difference equations». *J. Math. Anal. Appl.*, 303 (2) (2005), 492-498.
- [28] MARKUS, L.; YAMABE, H. «Global stability criteria for differential systems». *Osaka Math. J.*, 12 (1960), 305-317.
- [29] MEISTERS, G.; OLECH, C. «Solution of the global asymptotic stability Jacobian conjecture for the polynomial case». A: *Analyse mathématique et applications*. Montrouge: Gauthier-Villars, 1988, 373-381.
- [30] MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. 2a ed. Berlín: Springer-Verlag, 1993. (Biomathematics; 19)
- [31] OLECH, C. «On the global stability of an autonomous system on the plane». *Contributions to Differential Equations*, 1 (1963), 389-400.
- [32] SEDAGHAT, H. «Geometric stability conditions for higher order difference equations». *J. Math. Anal. Appl.*, 224 (2) (1998), 255-272.
- [33] STEVIĆ, S. «A note on the recursive sequence $x_{n+1} = p_k x_n + p_{k-1} x_{n-1} + \dots + p_1 x_{n-k+1}$ ». *Ukrain. Mat. Zh.*, 55 (4) (2003), 570-574. [Reimprès a *Ukrainian Math. J.*, 55 (4) (2003), 691-697]
- [34] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Addison-Wesley Publishing, 1994.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
EDIFICI C, CAMPUS DE LA UAB
08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)
cima@mat.uab.cat